ユニタリー作用素の解析

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

現代数学において，ユニタリー作用素の解析は重要な地位を占めています。単位的 $*$-代数 $\mathcal{A}$ の元 U がユニタリー元であるとは，

$$U^*U = UU^* = I \tag{1}$$

を満たすときを言います。ここで，I は $\mathcal{A}$ の単位元です。$\mathcal{A}$ としてあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素の集合 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき，ユニタリー元をユニタリー作用素と呼びます。特に，C*-代数 $\mathcal{X}$ のどのユニタリー元 U のノルムも，$\|U\| = 1$ である。どの C*-代数も，あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ にたいする $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の部分 C*-代数であり，このことからもユニタリー元のノルムが 1 であることが示されます。

以下の 3 つが，ユニタリー作用素に関わる解析として精力的に研究されています：

1. ユニタリー作用素自体の解析
2. ユニタリー作用素を通じた他の作用素や数学構造の解析
3. ユニタリー作用素の集まりから生成される代数系の解析

これらの解析を通じて，現代数学は豊かに展開されています。1 はユニタリー作用素と他の作用素との交換関係や，ユニタリー作用素のスペクトル分解（固有値分解）が主たる対象です [1]：

$$U = \int_{|z|=1} z \, dE^U(z) \tag{2}$$

2 では多様な数学的対象がユニタリー表現を通じて解析されます。例えば，稠密な定義域をもつ自己共役作用素 A をユニタリー作用素 U_A に変換するケーリー変換を通じて，A のスペクトル分解を得ます：

$$U_A = \frac{A - iI}{A + iI} = \int_{\mathbb{R}} \frac{a - i}{a + i} \, dE^A(a) \tag{3}$$

他にも,（強作用素位相で）連続な 1 パラメーター群 $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$（リー群 $\mathbb{R}$ のユニタリー表現）が与えられると，同じヒルベルト空間上の自己共役作用素（無限小生成子）B が存在して，B のスペクトル作用素によりスペクトル分解されます：

$$U(t) = e^{-itB} = \int_{\mathbb{R}} e^{-itb} \, dE^B(b). \tag{4}$$

リー群のユニタリー表現の 1 パラメーター部分群に対して無限小生成子を考えることで，対応するリー環の表現が得られます。より一般に，局所コンパクト群 G のユニタリー表現のなす圏 $\mathrm{Rep}(G)$ に対し，$\mathrm{Rep}(G)$ の圏の対象ごとに作用素を対応させる場（再表現）から元の局所コンパクト群 G が復元される「双対定理」が成り立ちます [2]。フーリエ変換で活躍する「ポントリャーギン双対性」はその特殊な場合にあたります。

そして，1 と 2 の双方と密接に関わるのが 3 です。ユニタリー元，もしくはヒルベルト空間上のユニタリー作用素の集まりから作用素代数（operator algebra）を生成し，得られた作用素代数の性質を調べます。あるいは，それを駆使することで生成にもちいたユニタリー元の集まりについての知見を得ることを目的としています。

3 と関わる最も重要な概念がゲルファント変換です。単位元をもつ可換 C*-代数 $\mathcal{X}$ 上の指標とは，以下を満たす $\chi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ のことを言います：
(1) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，$A, B \in \mathcal{X}$ に対して，$\chi(\alpha A + \beta B) = \alpha\chi(A) + \beta\chi(B)$,
(2) 任意の $A \in \mathcal{X}$ に対して，$\omega(A^*A) \geq 0$,
(3) 任意の $A, B \in \mathcal{X}$ に対して，$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$.
$\mathcal{X}$ 上の指標全体 $\mathrm{Spec}(\mathcal{X})$ はコンパクトハウスドルフ空間になります。$\mathcal{X}$ から $\mathrm{Spec}(\mathcal{X})$ 上の複素数値連続関数のなす C*-代数 $C(\mathrm{Spec}(\mathcal{X}))$ への写像 $\hat{} : \mathcal{X} \to C(\mathrm{Spec}(\mathcal{X}))$ を

$$\hat{X}(\chi) = \chi(X), \quad X \in \mathcal{X} \tag{5}$$

で定義します。この写像をゲルファント変換と呼びます。実は，$\mathcal{X}$ と $C(\mathrm{Spec}(\mathcal{X}))$ の間の（C*-代数としての）等長な同型写像になっています。

ヒルベルト空間上のユニタリー作用素 U と U^*（のべき乗の線型結合）から生成される C*-代数は可換であり，ゲルファント変換が適用できます。このことからも U のスペクトル分解（(2) 式）が導かれます [1]。この事実のように，作用素代数の手法がユニタリー作用素の解析と結びついています。ユニタリー作用素の集まりから生成される非可換な C*-代数として有名なものが，正準交換関係 $[Q, P] = iI$ を有界線型作用素として扱う手法の作用素代数版である，ワイル C*-代数です。(4) 式指数関数有界線型作用素ワイル形式 $e^{ix_1Q+ix_2P}$（$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$）の抽象化に当たるユニタリー作用素の集まり $\{W(x) \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ から生成される C*-代数 $\mathcal{W}[\mathbb{R}^2]$ のことです：$\{W(x) \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ は，$\mathbb{R}^2$ の任意の元 $x = (x_1, x_2)$ と $y = (y_1, y_2)$ に対し，次の関係式を満たします。

$$W(x)W(y) = e^{i\sigma(x,y)}W(x+y). \tag{6}$$

ただし，σ は $\sigma(x, y) = (x_1y_2 - x_2y_1)/2$ で定義されるシンプレクティック形式です。ここでは，1 次元 1 粒子系に対応する $\mathbb{R}^2$ の場合に限定しましたが，より一般のシンプレクティックベクトル空間上でワイル C*-代数が定義されます。ワイル C*-代数を基準とすることで，$e^{ix_1Q+ix_2P}$ と表される状況の特殊性が明らかにされます。まず，安心する事実として，$\mathcal{W}[\mathbb{R}^2]$ の $L^2(\mathbb{R})$ 上の表現 π で

$$\pi(W(x)) = e^{ix_1Q+ix_2P}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{7}$$

を満たすものが存在します。一方で，Q, P のような無限小生成子が存在しない $\mathcal{W}[\mathbb{R}^2]$ の表現も存在します。つまり，代数的関係式から生成される（普遍）作用素代数の観点からは，正準交換関係はその一実現なのです。ワイル C*-代数は量子場理論の物理量代数の 1 つとしても重要です。また，すこし話はかわりますが，C*-代数の特殊なクラスであるフォン・ノイマン代数の構造理論において中心的役割を果たすモジュラー自己同型群は，モジュラー作用素から生成される 1 パラメーターユニタリー群を用いて定義されます [3]。

量子論における時間発展の一般論では，完全正値写像や量子確率過程が基本的概念ですが，作用素代数の自己同型写像や，ヒルベルト空間上のユニタリー作用素により記述される時間発展はなんといっても重要です。それ故，ユニタリー作用素の解析は今後の数学的研究でも中心的な話題でありつづけるでしょう。上で紹介した 2, 3 での解析がなにかの拍子に役立つことがあるかもしれません。

参考文献

[1] 日合 文雄, 柳 研二郎,『ヒルベルト空間と線型作用素』,（牧野書店，1995）. [再販：オーム社，2021]
[2] 辰馬 伸彦,『位相群の双対定理』,（紀伊國屋書店，1994）.
[3] 竹崎 正道,『作用素環の構造』,（岩波書店，1983）.